



Open Archive TOULOUSE Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in : <http://oatao.univ-toulouse.fr/>
Eprints ID : 14686

To link to this article :

URL : <http://hdl.handle.net/2042/57584>

To cite this version :

Ouadhani, Soumaya and Abdenadher, Ali and Mojtabi, Abdelkader
Influence des vibrations verticales sur la séparation des espèces en couche poreuse horizontale chauffée par le bas. (2015) In: 22e
Congrès Français de Mécanique (CFM 2015), 24 August 2015 - 28
August 2015 (Lyon, France)

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository
administrator: staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

Influence des Vibrations Verticales sur la Séparation des Espèces en Couche Poreuse Horizontale chauffée par le bas

Soumaya Ouadhani^{a,b}, Ali Abdennadher^b, Abdelkader Mojtabi^a

^aIMFT, UMR CNRS/INP/UPS No. 5502, UFR MIG, Université Paul Sabatier,

118Route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France.

^bUniversité de Carthage/INSAT, Laboratoire d'Ingénierie Mathématique, EcolePolytechnique de Tunisie, Rue El Khawerzmi-B.P.743- 2078 La Marsa, TUNISIE.

Résumé :

On étudie l'influence des vibrations verticales harmoniques de hautes fréquences et de faibles amplitudes sur la séparation des espèces d'un mélange binaire saturant une couche poreuse horizontale de grande extension et soumise à une densité de flux de chaleur uniforme au niveau des parois horizontales. Le problème considéré dépend de cinq paramètres adimensionnels : le nombre de Rayleigh thermique Ra , le facteur de séparation ψ , le nombre de Lewis Le , la porosité normalisée ϵ , et le nombre de Rayleigh vibrationnel R_v . La stabilité de la solution d'équilibre mécanique est étudiée analytiquement et numériquement dans une cellule de grande extension horizontale. La perte de la solution d'équilibre conduisant à un écoulement unicellulaire est obtenue pour $Ra_{cs} = \frac{12}{\psi(Le+1)+1}$, et $k_c = 0$, pour tout ψ , et pour $R_v = 0$. Dans le cas où $R_v \neq 0$, on obtient des valeurs du nombre d'onde $k_c \neq 0$ pour $\psi \in]\psi_1, \psi_2[$.

Abstract :

We study the influence of vertical high-frequency and small-amplitude vibrations on the separation of a binary mixture saturating a shallow horizontal porous layer submitted to a vertical heat flux on the horizontal walls. In this work, an analytical and numerical stability analysis is performed. The problem is governed by five dimensionless parameters, namely the separation ratio ψ , the porosity of porous medium ϵ , the Lewis number Le , the thermal Rayleigh number Ra and the vibrational Rayleigh number R_v . For an infinite horizontal layer, a stability analysis is performed from which the threshold of stability is determined analytically and using spectral method. The onset of unicellular flow is obtained for $Ra_{cs} = \frac{12}{\psi(Le+1)+1}$, and $k_c = 0$, for all ψ , and for $R_v = 0$. For $R_v \neq 0$, we obtained the values of wave number $k_c \neq 0$ for $\psi \in]\psi_1, \psi_2[$.

Mots clefs: Convection, Thermo-diffusion, stabilité linéaire, milieu poreux, effet Soret, Thermo-vibration, Séparation des espèces.

1 Introduction

De nombreux travaux ont été consacrés à la convection thermovibrationnelle en milieu poreux. Khallouf et al. [1] ont considéré une cavité de section carrée remplie, d'un milieu poreux saturé par un fluide monoconstituant, différentiellement chauffée et soumise à des oscillations harmoniques linéaires dans la direction verticale. Dans leur étude, les auteurs ont utilisé le modèle Darcy-Boussinesq et une formulation directe. Dans le cas d'une couche horizontale poreuse saturée

par un liquide monoconstituant, chauffée par le bas ou par le haut, Zen'kovskaya et Rogovenko[2], Bardan et Mojtabi [3], ont utilisé le modèle de Darcy avec le terme instationnaire et ont adopté la formulation des équations moyennées pour étudier l'influence des vibrations de haute fréquence et de faible amplitude sur l'apparition de la convection. Ils ont constaté que les vibrations verticales stabilisent la solution de repos. Charrier Mojtabi et al. [4] ont étudié l'influence des vibrations sur la convection thermo-solutale dans une cellule poreuse horizontale chauffée par le bas ou par le haut. Ils ont montré que les vibrations verticales ont un effet stabilisant tandis que les vibrations horizontales ont un effet déstabilisant.

Elhajjar et al. [5] ont montré que les vibrations de hautes fréquences réduisent les valeurs critiques du nombre d'onde et augmentent le nombre de Rayleigh dans une cavité poreuse maintenue à des températures uniformes constantes T_c et T_f avec $T_c > T_f$ au niveau des parois horizontales. Les simulations numériques directes en 2D, et l'analyse de la stabilité linéaire des équations moyennées montrent que les vibrations verticales modifient les valeurs critiques du nombre d'onde et du nombre de Rayleigh pour des valeurs particulières du facteur de séparation ratio ψ .

L'objectif de notre travail, est d'étudier l'influence des vibrations verticales harmoniques de hautes fréquences et de faibles amplitudes sur la séparation des espèces d'un mélange binaire saturant une couche poreuse, de grande extension horizontale, soumise à un flux de chaleur injecté au niveau de la paroi horizontale du bas et retiré sur la paroi horizontale du haut. On utilise pour cette étude le formalisme des équations moyennées [6]. Nous montrons qu'il est possible d'effectuer la séparation des espèces d'un mélange binaire dans cette configuration géométrique, et que les vibrations peuvent être utilisées pour retarder la perte de stabilité de l'écoulement monocellulaire, ce qui permet d'assurer la séparation pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh. Après avoir présenté une étude de stabilité linéaire de la solution d'équilibre en cellule d'extension horizontale infinie, on étudie analytiquement et numériquement la séparation obtenue dans une couche de grand rapport d'aspect, pour des valeurs du nombre de Rayleigh conduisant à un écoulement monocellulaire.

2 Formulation mathématique

On considère une cavité parallélépipédique de section rectangulaire de rapport d'aspect $A=L/H$, où H est la hauteur de la cavité le long de l'axe vertical et L sa longueur le long de l'axe horizontal. Le rapport d'aspect est supposé infini dans l'étude de stabilité linéaire. Dans les simulations numériques le rapport d'aspect est $A = 10$. La cavité est remplie par un milieu poreux saturé par un fluide binaire pour lequel l'effet Soret est pris en compte.

Les parois horizontales sont soumises à un flux de chaleur q' . Les parois verticales ($x=0, x=L$) sont supposées imperméables et adiabatiques. Toutes les parois sont supposées rigides. L'effet Soret est pris en compte et la cavité est soumise à des oscillations linéaires harmoniques dans la direction verticale. La fréquence des oscillations est désignée par ω et leur amplitude par b . La prise en compte de ce champ justifie le terme de convection thermovibrationnelle.

Nous adoptons l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq. Les propriétés thermo-physiques du fluide binaire sont supposées constantes, à l'exception de la masse volumique du fluide au niveau du terme générateur de la convection:

$$\rho = \rho_r [1 - \beta_T (T - T_r) - \beta_C (C - C_r)] \quad (1)$$

Où β_T and β_C sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et massique du fluide binaire, (T_r et C_r correspondent à l'état de référence).

On considère un référentiel lié à la cavité poreuse; le champ de gravitation \mathbf{g} est remplacé par: $\mathbf{g} + b\varpi^2 \sin(\varpi t') \mathbf{e}_z$ où \mathbf{e}_z est le vecteur unitaire (axe des vibrations).

Les équations adimensionnelles de continuité, de conservation de la quantité de mouvement, de conservation d'énergie et de conservation des espèces régissant le problème sont données par :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ B \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} = -\nabla P + Ra(T + \psi C)(1 - R \sin(\omega t)) \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \\ \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 T) \end{cases} \quad (2)$$

Où $B = Da(\rho_c)_f / [(\rho_c)^* \varepsilon Pr]$ est l'inverse du nombre de Vadasz ($B = l/Va$) et $Da = K/H^2$ est le nombre de Darcy, K est la perméabilité du milieu poreux.

Le problème (2) dépend de sept paramètres adimensionnels:

les nombres de Rayleigh thermique et vibrationnel, $Ra = K g \beta_T H \Delta T / a \nu$, $R = b\varpi^2 / g$,

le facteur de séparation $\psi = -(\beta_c / \beta_T)(D_T^* / D^*)C_i(1 - C_i)$, le nombre de Lewis $Le = a / D^*$, la porosité normalisée $\varepsilon = \varepsilon^* / \sigma$, la pulsation adimensionnelle des vibrations $\omega = \varpi^2 \sigma H^2 / a$ et la constante B .

Les conditions aux limites adimensionnelles correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} &= 0, \forall M \in \partial\Omega, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = -1, \text{ pour } z = 0, 1 \quad \forall x \in [0, A] \\ \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \text{ pour } z = 0, 1 \quad \forall x \in [0, A] \end{aligned} \quad (3)$$

Dans l'équation de conservation de quantité de mouvement, le terme $B \partial \mathbf{V} / \partial t$ est généralement négligé puisque B est de l'ordre de 10^{-6} . Toutefois, dans notre problème les vibrations de haute fréquence provoquent des accélérations très élevées, ce qui nécessite la prise en compte d'un terme instationnaire S.M. Zen'Kovskaya, (1999) et G. Bardan et A. Mojtabi (2000).

Dans le cas des vibrations de haute fréquence, c'est-à-dire le cas où la période des vibrations est faible par rapport à tous les autres temps caractéristiques, on utilise la méthode de moyennisation [6]. Tous les champs peuvent être considérés comme la superposition d'une partie moyenne et d'une partie vibratoire :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^*(t) + \mathbf{u}'(\omega t); P = P^*(t) + p'(\omega t); T = T^*(t) + \theta'(\omega t); C = C^*(t) + c'(\omega t) \quad (4)$$

Où $\mathbf{V}^*, P^*, T^*, C^*$ sont les champs moyens. Le découplage entre les parties vibratoires de la vitesse et la pression est obtenue en utilisant la décomposition de Helmholtz: $(T^* + \psi C^*) \mathbf{e}_z = \mathbf{W} + \nabla \xi$ où \mathbf{W} est la partie solénoïdale de $(T^* + \psi C^*) \mathbf{e}_z$ vérifiant $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$.

On obtient le système d'équations associé aux grandeurs moyennées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{V}^* = 0 \\ B \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla \mathbf{V}^* = -\nabla P^* + Ra(T^* + \Psi C^*) \mathbf{e}_z + R_v [\mathbf{W} \cdot (\nabla T^* + \frac{\Psi}{\varepsilon^*} \nabla C^*)] \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial T^*}{\partial t} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla T^* = \nabla^2 T^* \\ \varepsilon \frac{\partial C^*}{\partial t} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla C^* = \frac{1}{Le} (\nabla^2 C^* - \nabla^2 T^*) \\ (T^* + \psi C^*) \mathbf{e}_z = \mathbf{W} + \nabla \xi ; \nabla \cdot \mathbf{W} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

En plus des conditions aux limites (3) appliquées aux champs moyens, on considère : $\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Le nombre de Rayleigh vibrationnel $R_v = (Ra^2 R^2 B) / (2(B^2 \omega^2 + 1))$ caractérise l'intensité des vibrations.

3 Stabilité linéaire de la solution d'équilibre en couche poreuse de grande extension horizontale

La stabilité de la solution d'équilibre, en couche horizontale chauffée par le bas, a été étudiée, par Charrier-Mojtabi et al. [7]. Leur étude était limitée au cas $Le = 2$ pour un gaz binaire et $Le = 100$ pour les solutions. Nous étendons cette étude au cas des nombres de Lewis élevés et nous analysons plus particulièrement la transition entre la solution d'équilibre et l'écoulement monocellulaire obtenu dans le cas des mélanges binaires. Le problème considéré admet une solution d'équilibre mécanique caractérisée par :

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}, T_0 = -z + cste, C_0 = -z + \frac{1}{2}, \mathbf{W}_0 = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Pour étudier la stabilité de cette solution d'équilibre, nous introduisons les perturbations de la composante verticale de la vitesse w , la perturbation de la composante verticale du champ \mathbf{W} soit w_2 , les perturbations de la température θ , et de la fraction massique, c . On suppose que les perturbations (w, w_2, θ, c) sont de faible amplitude comparées aux divers champs de base et choisis comme suit :

$$(w, \theta, c, w_2) = [\tilde{w}(z), \tilde{\theta}(z), \tilde{c}(z), \tilde{w}_2(z)] e^{ikx + \sigma t} + c.c \quad (7)$$

Où k est le nombre d'onde selon la direction (x) , $I^2 = -1$, et σ est le facteur d'amplification temporelle de la perturbation. En combinant les équations de Darcy et de l'énergie, on obtient, les équations aux perturbations linéarisées suivantes, on se restreint à la transition stationnaire, $\sigma = 0$:

$$(D^2 - k^2)w + Rak^2(\theta + \psi c) - R_v w_2 k^2 (1 + \frac{\psi}{\varepsilon}) = 0$$

$$(D^2 - k^2)\theta + w = 0$$

$$\frac{1}{Le} (D^2 - k^2)(c - \theta) + w = 0$$

$$(D^2 - k^2)w_2 + k^2(\theta + \psi c) = 0 \quad (8)$$

3.1. $R_v = 0$: Dans ce cas les équations (8) se ramènent à l'équation vérifiée par la composante θ :

$$(D^2 - k^2)^2 \theta - Rak^2(1 + \psi(Le + 1))\theta = 0 \quad (9)$$

Avec les conditions aux limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \text{ pour } z = 0, 1 \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - k^2 \theta = 0 \text{ pour } z = 0, 1 \end{array} \right. \quad (10)$$

La solution générale de l'équation différentielle du quatrième ordre (9), s'écrit comme une combinaison de quatre fonctions indépendantes dont l'expression dépend du signe de $Ra(1+\psi+\psi Le)$.

(a) Si $Ra(1 + \psi(Le + 1)) > 0$: Dans ce cas

$$\theta(z) = A \cosh(R_1 z) + B \sinh(R_1 z) + C \cos(R_2 z) + D \sin(R_2 z) \quad (11)$$

Où:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = (k^2 + kR^*)^{1/2} \\ R_2 = (kR^* - k^2)^{1/2} \text{ avec } R^* = (Ra(1 + \psi + \psi Le))^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

En écrivant que la solution $\theta(z)$ vérifie les quatre conditions aux limites (10), on obtient un système homogène de quatre équations à quatre inconnues A, B, C et D. Ce système algébrique admet une solution non triviale si le déterminant de la matrice associée, $\det(Ra(k), k, \psi, Le)$, est nul. L'expression de ce déterminant a été obtenue en utilisant le logiciel Maple. Quand on calcule le déterminant, on obtient l'équation de dispersion reliant le nombre de Rayleigh, le nombre d'onde, le nombre de Lewis Le et le facteur de séparation ψ .

$$k^2 \sinh(k(k + R^*))^{\frac{1}{2}} \sin(k(-k + R^*))^{\frac{1}{2}} + k(R^{*2} - k^2)^{\frac{1}{2}} \cos(k(-k + R^*))^{\frac{1}{2}} \cosh(k(k + R^*))^{\frac{1}{2}} - k(R^{*2} - k^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (12)$$

On en déduit l'expression du nombre de Rayleigh critique et du nombre d'onde critique:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ra_c = \frac{12}{1 + \psi(Le + 1)} \\ k_c = 0 \end{array} \right.$$

(b) Si $Ra(1 + \psi(Le + 1)) < 0$: Dans ce cas, on a:

$$\theta(z) = e^{\alpha z} (A \cosh(\beta z) + B \sinh(\beta z)) + e^{-\alpha z} (C \cos(\beta z) + D \sin(\beta z)) \quad (13)$$

Où $\alpha + i\beta$ est racine de l'équation caractéristique.

Cas des perturbations de très grandes longueurs d'onde:

Lorsque le nombre d'onde critique k tend vers zéro, le développement limité du déterminant $\det(Ra(k), k, \psi, Le)$ en fonction de k permet d'obtenir le nombre de Rayleigh critique stationnaire pour $k=0$ soit :

$Ra_{cs} = \frac{12}{1 + \psi(Le + 1)}$ pour $Ra > 0$ et $\psi > -\frac{1}{Le + 1}$. Pour $\psi < 0$ et $Ra < 0$, on obtient également $Ra_{cs} = \frac{12}{1 + \psi(Le + 1)}$ avec $k_c = 0$. Les résultats analytiques obtenus sont présentés sur la figure 1 pour un nombre de Lewis égal à 5. Il ressort de l'examen de cette figure que pour $Ra > 0$ et $\psi > 0$ le composant le plus dense migre vers la paroi froide, la solution de double diffusion pure perdra sa stabilité pour des

$Ra < Ra_c = 1708$ associé à la perte de stabilité dans le cas d'un fluide monoconstituant. Pour $\psi < 0$, le composant le plus dense migre vers la paroi chaude rendant plus stable la solution d'équilibre par rapport au cas du fluide monoconstituant.

3.2. $R_v \neq 0$: Dans ce cas les résultats sont obtenus en utilisant la méthode de Galerkin à l'ordre $N=4$.

Pour un nombre de Rayleigh vibrationnel, $R_v > \frac{640(Le+1)}{7(Le-1)^2}$, la valeur du Rayleigh critique est $Ra_{cs} =$

$\frac{12}{1+\psi(Le+1)}$ avec $k_c = 0$ pour tout ψ sauf pour $\psi \in]\psi_1, \psi_2[$, et pour $R_v = \frac{640(Le+1)}{7(Le-1)^2}$ quand $\psi < \psi_{12}$.

Avec :

$$\begin{cases} \psi_{12} = -\frac{Le+3}{4(Le+1)} \\ \psi_1 = -\frac{Le+3-\sqrt{(Le-1)^2-640(Le+1)/7R_v}}{4(Le+1)} \\ \psi_2 = -\frac{Le+3+\sqrt{(Le-1)^2-640(Le+1)/7R_v}}{4(Le+1)} \end{cases} \quad (14)$$

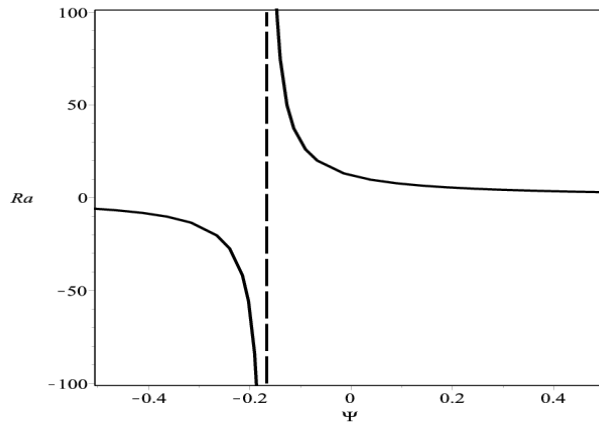


Fig. 1. Courbes de stabilité marginale pour $Le = 5$. En traits continus : bifurcation stationnaire. En traits discontinus :

$$\psi = -\frac{1}{Le+1}$$

4 Simulations numériques

Les équations moyennées (5), avec les conditions aux limites associées ont été résolues en utilisant la méthode aux éléments finis (Comsol). L'influence des vibrations sur l'apparition de la convection a été étudiée pour une cellule de rapport d'aspect $A = 10$ et pour $Le = 30$, $R_v = 0$ and $R_v = 10$, $\varepsilon = 0.5$, (B est fixée à 10^{-6}).

Les simulations numériques menées pour les différentes valeurs des paramètres donnés précédemment sont en bon accord avec les résultats analytiques obtenus §3.

Les figures (2, 3) montrent les lignes de courant, les isothermes et les isoconcentrations. On peut observer que les vibrations modifient faiblement la structure de l'écoulement.

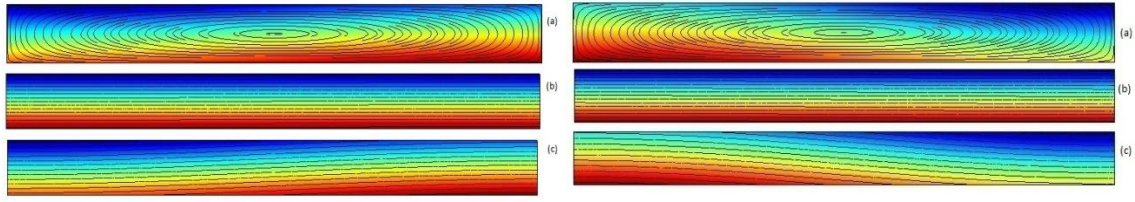


Fig.2: (a) Lignes de courant, (b) Isothermes
(c) Isoconcentrations pour $\psi = 0.1$,
 $Le = 30$, $R_v = 0$ et $Ra = 2.96$.

Fig.3: (a) Lignes de courant, (b) Isothermes
(c) Isoconcentrations pour $\psi = 0$.
 $Le = 30$, $R_v = 10$ et $Ra = 3.09$.

5 Conclusion

On a étudié analytiquement et numériquement, l'influence des vibrations verticales sur la séparation des espèces d'un mélange binaire saturant une couche poreuse horizontale de grande extension et soumise à un flux de chaleur vertical. L'un des résultats important qui ressort de cette étude est que les vibrations peuvent être utilisées pour retarder la perte de stabilité de l'écoulement monocellulaire, ce qui permet d'assurer la séparation pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh.

Références

- [1] H. Khallouf, G.Z. Gershuni, and A. Mojtabi. Some properties of convective oscillations in porous medium. *Numerical Heat Transfer part A-Applications D*, 30 :605–618, 1996.
- [2] S. Zen'kovskaya and T. Rogovenko. Filtration convection in a high-frequency vibration field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 40(3) :379–385, May 1999.
- [3] G. Bardan and A. Mojtabi. On the Horton-Rogers-Lapwood convective instability with vertical vibration : Onset of convection. *Physics of Fluids*, 12(11) :2723–2731, 2000.
- [4] M.C. Charrier-Mojtabi, Y.P. Razi, K. Maliwan, and A. Mojtabi. Influence of vibration on solet-driven convection in porous media. *Numerical Heat Transfert Part A Applications*, 46 :981–994, 2004.
- [5] B. Elhajjar, A. Mojtabi, and M. C. Charrier-Mojtabi. Influence of vertical vibrations on the separation of the binary mixture in a horizontal porous layer heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52 :165 – 172, 2009.
- [6] G.Z. Gershuni and D.V. Lyubimov. *Thermal Vibrational Convection*. John Wiley & Sons, 1998.